

Info : Rà Q en CM 1 105 $\rightarrow$ on utilise le Thème 1.1

(Adapté de 2017)

La limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y^2}{x^4 + y^8}$

☐ existe et vaut 0

☐ existe et vaut $\frac{1}{2}$

☐ existe et vaut $\frac{5}{12}$

☒ n'existe pas

Are you sure?

Test des directions

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r^5 \cos^3 \theta \sin^2 \theta}{r^4 (\cos^4 \theta + r^4 \sin^8 \theta)}$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r \cos^3 \theta \sin^2 \theta}{\cos^4 \theta + r^4 \sin^8 \theta}$$

$$= 0.$$

Critère :

$$\left| \frac{r^5 \cos^3 \theta \sin^2 \theta}{r^4 (\cos^4 \theta + r^4 \sin^8 \theta)} \right|$$

$$\left| \frac{r^5 \cos^3 \theta \sin^2 \theta}{r^4 (\cos^4 \theta + r^4 \sin^4 \theta)} \right| = r \frac{|\cos^3 \theta| \sin^2 \theta}{\cos^4 \theta + \underbrace{r^4 \sin^4 \theta}_1}$$

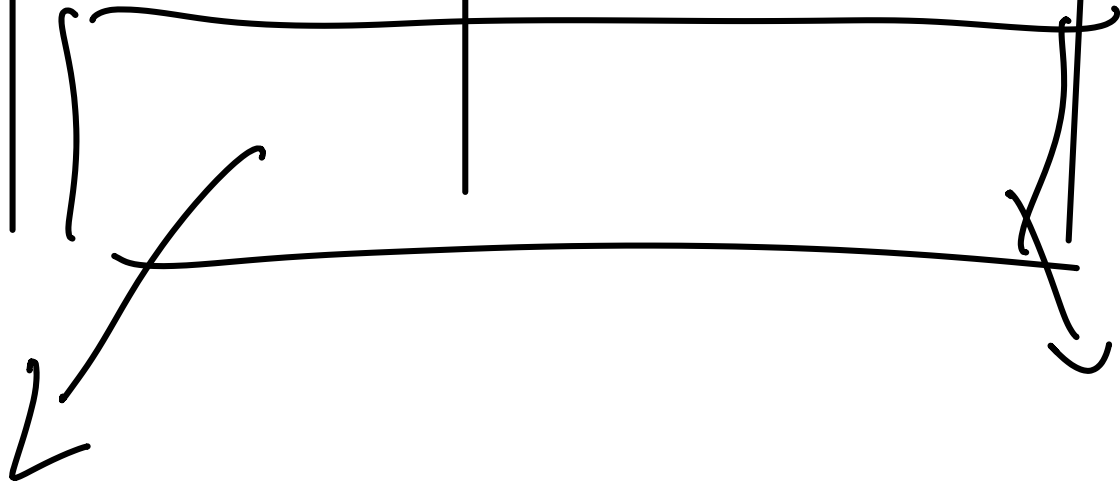
$$\cos^4 \theta + r^4 \sin^4 \theta \geq \cos^4 \theta$$

$$\leq r \frac{|\cos^3 \theta|}{\cos^4 \theta} \cdot \sin^2 \theta = r \cdot \frac{1}{|\cos \theta|} \cdot \sin^2 \theta \rightarrow \text{oops.}$$

chercher un problème.

$$r \mapsto (r^2, r)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^8}{r^8 + r^8} = \frac{1}{2}$$

	Sûr	pas sûr
Vrai	Bravo!	Faites vous confiance!
Faux		

Action plan:

- 1) DONT IT PANIC ←
- 2) Discuter!
 - forum
 - potes
 - RaQ

2018

Question 21: Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et soit $\bar{E}$ son adhérence. Si $E = \bar{E}$, alors le bord de E est vide.

☐ VRAI ☒ FAUX

Ensembles, int, ∂ . $\bar{E} = E \cup \partial E$

$\bar{E}$ est le plus petit fermé qui contient E .

E est fermé, $\Leftrightarrow E = \bar{E}$

$E = \bar{B}(a, r)$, $E = \bar{E} = \bar{B}(a, r)$

$\partial E = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(a, x) = r\} \neq \emptyset$

2018

Question 28 : Soit $(x_k)_{k \geq 1}$ une suite dans $\mathbb{R}^n$ telle que $\|x_k\| = 1$ pour tout $k \geq 1$.

Alors il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\| = 1$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = x$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Propriétés algébriques de la limite :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = \ell \quad \Rightarrow \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \|x_k\| = \|\ell\|.$$

$$x_k = (-1)^k$$

2019

Question 21 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$, une fonction de classe C^2 et soit $H_f(a)$ la matrice hessienne de f en $a \in \mathbb{R}^3$. Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) = -2$ et si le déterminant de $H_f(a)$ vaut -3 , alors f admet un maximum local en a .



VRAI



FAUX

$$a+b$$

$$a-b$$

$$a+b+c$$

$$a \cdot b \cdot c$$

Ch optimisation de fct
 $\rightarrow$ extr. locaux

Tris déterminant trace.

$\rightarrow$ val propres de la Hessienne.

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$f(x, y, z) = -x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{4}z^2$$

pt selle en $(0,0,0)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) = -2 \rightarrow \text{we sent a' rien}$$

$$\det H_f(a) = -2, \quad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -2.$$

$$2 \text{ options } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < 0$$

$$\text{or } \boxed{\lambda_1 < 0, \lambda_2, \lambda_3 > 0} \text{ or } \lambda_2 < 0, \lambda_1 \lambda_3 > 0$$

$$\lambda_3 < 0, \lambda_1 \lambda_2 > 0.$$

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 1$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

min

2019

Question 23: Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et soit S la surface

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\}.$$

Si $f(0, 0) = 3$ et si f admet en $(0, 0)$ un minimum local, alors l'équation du plan tangent à S au point $(0, 0, 3)$ est donnée par $z = 3$.

☒ VRAI ☐ FAUX

$(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ f admet un min local $\Rightarrow \nabla f(0, 0) = (0, 0)$

∇f existe.

Equation du plan tangent
au graphe

$$z = f(0, 0) + (x - 0) \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + (y - 0) \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$$

2020

Question 19: Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1(\mathbb{R})$, et soit $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $F(x, y) = y - f(x)$. Alors, le gradient de F en $(0, f(0))$ est orthogonal à la tangente au graphe de la fonction f en $(0, f(0))$.

☒ VRAI ☐ FAUX

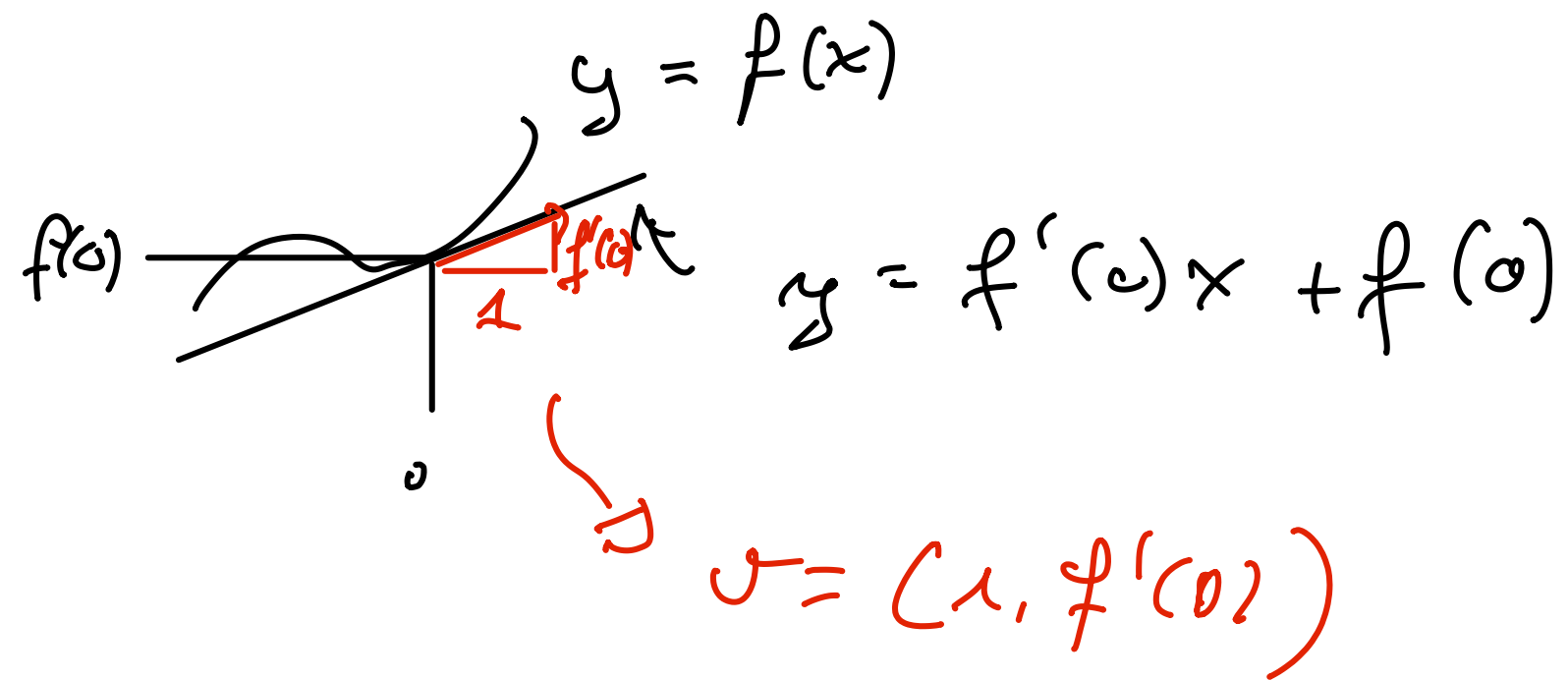
TFI

$$F^{-1}(\{0\}) = G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}.$$

$\nabla F \perp$ sur ensemble de niveau.

$\hookrightarrow$ = graphe de f .

$$\nabla F(0, f(0)), \quad \nabla F = (-f'(x), 1). \quad \nabla F(0, f(0)) = (-f'(0), 1)$$



$$\begin{aligned}
 \langle \nabla F(0, f(0)), v \rangle &= \langle (-f'(0), 1), (1, f'(0)) \rangle \\
 &= -f'(0) + f'(0) = 0.
 \end{aligned}$$

2021

Question 21 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $\nabla f(1,0) = (2, -1)$.

Si $f(1,0) = 1$ pour $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, alors f n'est pas différentiable en $(1,0)$.

☒ VRAI ☐ FAUX

$\frac{\partial f}{\partial v}(1,0)$

f diff $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}$ existe

$\|v\| = 1$

& $\frac{\partial f}{\partial v}(\tilde{x}, \tilde{y}) \neq \langle \nabla f(\tilde{x}, \tilde{y}), v \rangle$

$$\langle \nabla f(1,0), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \rangle = \langle (2, -1), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = 1$$

$f \in C^1$

$\Downarrow$

$\frac{\partial f}{\partial v} \in C^0$

$A \Rightarrow B$

$\neg B \Rightarrow \neg A$

Conclusion :

Pour l'examen : Tout

Pour la suite des études : Faire des dessins!

Pour la suite de la vie : Faire des dessins!